Департамент образования города Москвы

Государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования города Москвы

«Московский городской педагогический университет»

Институт цифрового образования

Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

Цатурова Анастасия Левоновна

Тема курсовой работы

Произведение классов групп и проекторы конечных групп

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

Направление подготовки/специальность 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы   
Математика

(очная форма обучения)

|  |  |
| --- | --- |
| Руководитель курсовой работы: |  |
| профессор, доктор физико-математических наук |  |
| Ведерников Виктор Александрович |  |
| \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(подпись)* |  |

Москва

2018

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc532759756)

[Используемые обозначения, определения и известные результаты 5](#_Toc532759757)

[1 Особенности оперирования конечными группами 8](#_Toc532759758)

[1.1 Произведение классов конечных групп 8](#_Toc532759759)

[1.2 Проекторы конечных групп 11](#_Toc532759760)

[2 Класс Шунка как пример класса конечных групп 20](#_Toc532759761)

[Заключение 31](#_Toc532759762)

[Список литературы 32](#_Toc532759763)

# Введение

Термин конечные группы появился намного позже чем первые исследования в этой тематике. Вопросы, связанные со свойствами конечных групп, изучались известными математиками Лагранжем (французский математик, астроном и механик 1736-1813), Руффини (итальянский математик, доктор медицины 1765—1822) и Абелем (норвежский математик 1802 – 1829).

Исследования алгебраических уравнений на разрешимость в радикалах привело математиков к изучению групп подстановок корней многочленов. В 1771 году Лагранж доказал для циклических групп подстановок теорему о числе левых и правых классов смежности.

Далее Абель дополнил исследования Лагранжа и выделил роль коммутативных групп в этом вопросе, позже коммутативные группы стали называть абелевыми.

Абстрактное определение группы как объекта исследования было дано уже Кэли английским математиком (1821-1895). В 1878 году доказана теорема о представлении произвольной конечной группы подстановками.

Особый вклад в теорию абстрактных конечных групп внес Фробениус (немецкий математик 1849-1917), описавший конечные абелевы группы и создал теорию их матричных представлений [8].

Целью данной работы является изучение свойств конечных групп, произведений классов конечных группам проекторов.

Для достижения поставленной цели в работе предполагается решение целого комплекса задач:

* определение конечной группы и ее свойств;
* определение произведения классов конечных групп;
* рассмотрение особенностей оперирования конечными группами;
* изучение проекторов конечных групп;
* изучение свойств класса Шунка как примера класса конечных групп.

# Используемые обозначения, определения и известные результаты

Понятие группы может быть введено с использованием различных определений, например, моноида или полугруппы. При этом структура самого объекта (группы) вне зависимости от определения обладает одинаковыми свойствами.

Вслед за Монаховым В.С. [5] введем понятие группы с использованием определения полугруппы и бинарной операции, которая определена на полугруппе.

Бинарной операциейназывается отображение декартового квадрата  во множество . Если  является бинарной операцией на множестве , то для любой упорядоченной пары элементов их множества , существует единственный элемент этого множества, который и определяет бинарную операцию .

Примерами бинарных операций, которые определены на множестве натуральных чисел, могут служить арифметические операции сложения и умножения. Так как результатом сложения натуральных чисел получается натуральное число, аналогично для умножения натуральных чисел.

Чаще всего бинарные операции определяют как аддитивные или мультипликативные, и соответственно обозначают:

для любых  и  из   - мультипликативная операция (умножение);

 - аддитивная операция (сложение).

Бинарная операция может обладать некоторыми свойствами, например:

* ассоциативности;
* коммутативности

Ассоциативной называют бинарную операцию умножения если:

для любых  и  из 

Таким образом, в ассоциативной бинарной операции можно произвольным образом расставлять скобки.

Коммутативной называют бинарную операцию умножения если:



Таким образом, в коммутативной бинарной операции можно произвольным образом расставлять сомножители, от перемены их мест результат операции не меняется.

Если существует элемент  множества , для которого выполняется следующее соотношение:

,

то этот элемент называют единичным.

Пусть на множестве  с определенной бинарной операцией умножения существует единичный элемент, тогда обратным элементом к элементу  множества  называют :



Непустое множество  с определе6нной на нем бинарной операцией умножения называют полугруппой если бинарная операция возвращает результат в это же множество и является ассоциативной:

для любых  из ;

для любых  и  из .

Группой называется полугруппа с единицей, у каждого элемента которой существует обратный элемент.

Полное определение группы по умножению можно записать следующим образом:

Непустое множество  с заданной на нём бинарной операцией  называется группой , если выполнены следующие аксиомы:

1. ассоциативности для любых  и  из ;
2. наличия нейтрального элемента ;
3. наличия обратного элемента .

Порядком группы  является мощность множества, определяемого группой. Для конечной группы мощность определяет число элементов группы.

Гомоморфизмом групп является отображение групп, которое сохраняет групповую структуру. Отображение  называется гомоморфизмом, если удовлетворяет условию 

# Особенности оперирования конечными группами

## Произведение классов конечных групп

Рассмотрению подлежат множества групп, другими словами, множества, в состав которых в качестве элементов входят группы. Под классом групп понимается множество групп, в которое вместе с каждой из своих групп входят все изоморфные ей группы. Некоторые классы обладают стандартными обозначениями [5]:

* A – класс всех абелевых групп;
* U – класс всех сверхразрешимых групп;
* T – класс всех (конечных) групп;
* S – класс всех разрешимых групп;
* N – класс всех нильпотентных групп.

Если  является некоторым множеством простых чисел и  - класс групп, то под обозначением Xπ понимается класс всех -групп из X. Очевидно, что Xπ =X∩Tπ. Группы из класса X имеют также название X -групп.

Класс X называют наследственным классом или классом, который замкнут относительно подгрупп, при выполнении следующего требования: если G X и , то H X (требование ).

Класс X считается замкнутым относительно факторгрупп или гомоморфом при условии выполнения следующего требования: если G X и , то G/N X (требование ).

Класс X считается замкнутым относительно прямых произведений при выполнении требования: если G1 X и G2 X, то G1 x G2 X (требование ).

Класс X называют насыщенным при выполнения требования: если G/N X, , то G X (требование ).

Класс X называют замкнутым относительно подпрямых произведений при выполнении требования: если G/N1X и G/N2X, то G\N1∩N2X (требование ).

Формация – это класс групп, который замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Другими словами, для формации выполненными являются требования  и .

Формацию считают насыщенной если она представляет из себя насыщенный класс, то есть если для нее выполняется требование (). Очевидно, что класс групп, который замкнут относительно подпрямых произведений, является замкнутым и относительно прямых произведений. В частности, каждая из формаций является замкнутой относительно прямых произведений.

Целесообразно рассмотреть следующую теорему: класс групп, который замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений, считается формацией [4].

Доказательство данной теоремы следующее. Делается допущение, что для класса F выполнены требования (), () и (). Проверке подлежит предположение, что и требование () также справедливо. Пусть G/N1 F и G/N2 F. В соответствии с леммой Ремака, факторгруппа  является изоморфной подгруппе прямого произведения . Поскольку выполнено требование (), то G/N1 x G/N2 F. Выполнение требования () влечет за собой принадлежность F каждой из подгрупп прямого произведения. В частности G/N1∩N2 F.

Для лучшего понимания теоремы целесообразным является рассмотрение нескольких примеров.

* как уже было сказано, A является классом всех абелевых групп. Подгруппы и факторгруппы всех абелевых групп тоже относятся к абелевым группам. Следовательно, условия доказанной теоремы для класса A выполняются. Поэтому A является формацией. Однако данная формация не является насыщенной. Действительно, все группы, имеющие порядок  - абелевы, поэтому все из них принадлежат A. В неабелевой группе  кватернионов порядка  порядок подгруппы Фраттини  составляет , следовательно, Q/Ф(Q)A, однако  не содержится в A;
* для класса U справедливы требования вышедоказанной теоремы, поэтому U является насыщенной формацией;
* класс Tπ всех -групп относится к насыщенным формациям. Очевидно, что класс Tπ является замкнутым относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений. В соответствии с вышеуказанной теоремой данный класс – формация. Если G/Ф(G) Tπ, то , значит, G Tπ и Tπ является насыщенной формацией;
* для класса S выполнены требования вышедоказанной теоремы, и, в соответствии с леммой данной теоремы, справедливо требование (). Исходя из этого, S является насыщенной формацией;
* для класса N выполняются требования вышедоказанной теоремы. Поэтому, N является формацией. Если G/NN, , то GN. Значит, N является насыщенной формацией;
* так как пересечение насыщенных формаций считается насыщенной формацией, то к насыщенным формациям могут быть отнесены следующие классы групп: Nπ=N∩Tπ - класс всех нильпотентных -групп, Sπ=S∩Tπ - класс всех разрешимых -групп, Uπ=U∩Tπ - класс всех сверхразрешимых групп.

Класс X относится к примитивно замкнутым классам при выполнении требования: если все факторгруппы группы , являющиеся примитивными, принадлежат X, то и GX (требование ).

Так как получение примитивной факторгруппы может быть осуществлено как факторгруппы группы  по ядру определенной максимальной подгруппы, то требование () является эквивалентным следующему требованию: если G/CoreGMX для всех , то GX (требование ).

## Проекторы конечных групп

Пусть  является группой, а X - классом групп. Если  - подгруппа группы  и HX, то  имеет название X -подгруппы. X -максимальная подгруппа группы  - это такая X -подгруппа  из , которая не входит в состав никакой большей X -подгруппы. Следовательно, подгруппа  X -максимальна в , если HX и из условий

, KX.

следует, что .

Подгруппа  группы  называют X -проектором группы , если  - X -максимальная подгруппа группы  для любой из нормальных подгрупп  группы .

Следует проиллюстрировать приведенные определения на примере. Пусть Np - класс всех -групп. Рассматривается произвольная группа , пусть  является силовской -подгруппой в . Поскольку GpNp и индекс  в группе  не делится на , то  - Np -максимальная подгруппа группы . Для любой из нормальных подгрупп  группы  в соответствии с предыдущей теоремой, факторгруппа  является силовской -подгруппой в , следовательно,  Np - максимальна в  и  - Np -проектор группы . Значит, Np -проектор группы  совпадает с силовской -подгруппой группы .

Далее необходимо доказать следующую лемму: пусть X является классом групп. Если  - X -проектор группы  и , то  является X -проектором факторгруппы .

Доказательство леммы следующее: пусть . Тогда:

.

Поскольку  является X -проектором группы , то  X -максимальна в . Следовательно:



X -максимальна в:



и  - X -проектор группы .

Важной является следующая лемма: пусть X - класс групп. Подгруппа  группы  считается X -проектором группы  тогда и только тогда, когда  X -максимальна в  и для любой нормальной подгруппы  группы  подгруппа  - X -проектор группы .

Следует доказать данную лемму. Если  - X -проектор группы , то  X -максимальна в  и согласно предыдущей лемме подгруппа  - X -проектор группы  для любой минимальной нормальной подгруппы  группы .

Обратно, пусть  - X -максимальна в  и  - является X -проектором группы  для каждой из минимальных нормальной подгруппы  группы . Пусть  является произвольной нормальной неединичной подгруппой группы  и пусть  является минимальной нормальной подгруппой группы , входящей в состав . В соответствии с условием леммы,  - X -проектор группы , следовательно:



X -максимальна в

.

Поэтому,  - X -проектор группы .

Также важной является следующая лемма: пусть X - гомоморф, ,  и . Если  - X -проектор факторгруппы , то каждый из X -проекторов подгруппы  является X -проектором группы .

Доказательство данной леммы: пусть  является X -проектором подгруппы . Тогда  X -максимальна в , а поскольку  - X -проектор группы , то .

Пусть K≤LX, L≤G. Тогда

.

Так как X - гомоморф, то L/L∩NX и , то есть . Из X -максимальности подгруппы  в  следует, что  и  X -максимальна в .

Далее делается предположение, что подгруппа  не является X -проектором группы . Это значит, что существует нормальная подгруппа  в группе  такая, что  не X -максимальна в , то есть может быть найдена подгруппа S/AX и . Так как  - X -проектор группы  и , то



X -максимальна в  и  X -максимальна в . Помимо этого,

X,

а так как

,

то X -максимальность  в  обуславливает правильность выражения . Теперь

,

а поскольку  - X -проектор группы , то



X -максимальна в . Однако

,

где X и X. Поэтому , что является противоречащим допущению

Доказав две леммы, можно перейти к формулировке теоремы: пусть X - является классом групп, а Y - класс Шунка. Если в каждой из Y-групп можно найти X -проектор, то X∩ Y является классом Шунка.

Необходимо доказать данную теорему. Пусть G X∩ Y и . Тогда G/NY, поскольку Y является гомоморфом. Так как G X, то  является своим X -проектором, следовательно G/N X и X∩ Y - гомоморф.

Пусть

 X∩ Y

для всех . Поскольку Y - класс Шунка, то G Y. Пусть  - X -проектор группы , он существует в соответствии с условиями теоремы. Делается предположение, что . Тогда в группе  существует максимальная подгруппа  такая, что . Поскольку , то . Но



X-максимальна в  согласно определению X-проектора, следовательно,  не принадлежит X. Наблюдается противоречие. Следовательно, , G X и требование () для класса X∩ Y выполняется. Следовательно, X∩ Y является классом Шунка.

Из доказанной теоремы вытекает следствие. Оно включает в себя следующие пункты:

1. Пусть X - класс групп. Если в каждой из групп существует X -проектор, то X - класс Шунка.
2. Разрешимый класс X, для которого каждая из разрешимых групп обладает X -проектором, является классом Шунка.

Доказательство первого пункта следует из теоремы в том случае, когда Y=T - класс всех групп.

Второе утверждение является следствием теоремы в том случае, когда Y=S - класс всех разрешимых групп.

Также важной в данном контексте является теорема: если X - класс Шунка, то в каждой группе присутствует X -проектор.

Доказательство теоремы начинается с предположения о существовании групп, в которых X -проекторы отсутствуют. Среди таких групп осуществляется выбор группы, имеющую наименьший порядок, она обозначается через . Итак, в группе  отсутствует X -проектор, однако в каждой из групп меньшего порядка присутствует X -проектор.

Если группа  является простой, то каждая X -максимальная подгруппа считается X -проектором группы . Следовательно, группу  нельзя отнести к простым. Пусть , . Тогда  и в  существует X -проектор. Он обозначает через . Если  является собственной подгруппой, то  и в  по индукции существует X -проектор, который в соответствии с леммой будет X -проектором группы . Получено противоречие.

Значит,  и X для всех неединичных нормальных подгрупп  группы .

Если  не относится к примитивным, то все примитивные факторгруппы группы  отличны от  и принадлежат X. Однако X - класс Шунка, следовательно, G X и сама группа  является X -проектором, опять же возникло противоречие.

Поэтому, можно считать  примитивной. В соответствии с доказанной теоремой в группе  существует не более двух минимальных нормальных подгрупп.

Далее целесообразно рассмотреть все возможные случаи.

Случай 1. В группе  существует единственная минимальная нормальная подгруппа.

Пусть . Если , то  X и согласно доказанной теореме группа G X, возникло противоречие. Поэтому, в  не содержится . Это означает, что существует максимальная подгруппа  группы  такая, что . Пусть  - X -проектор подгруппы , он существует по индукции, и  - X -максимальная подгруппа группы , которая содержит . Так как

 X,

то  и .

Пусть теперь  является произвольной неединичной нормальной подгруппой группы . В данном случае,  - единственная минимальная нормальная подгруппа, следовательно  и  X, то есть  X -максимальна в  и  - X -проектор группы .

Случай 2. В группе  две минимальные нормальные подгруппы  и  В соответствии с теоремой



где . Поскольку  X и , то  X -максимальна в  Пусть  является произвольной неединичной нормальной подгруппой группы . Тогда минимальная нормальная подгруппа в группе  из  совпадает с  или . Пусть . Тогда  и  X -максимальна в , то есть  - X -проектор группы .

Объединив предыдущую теорему и следствие из нее, можно получить два новых следствия.

Первое следствие заключается в том, что класс X является классом Шунка тогда и только тогда, когда в каждой из групп присутствует X -проектор.

Формулировка второго следствия: если F - насыщенная формация, то у каждой из групп существует F-проектор.

Доказательство этих следствий заключается в том, что в соответствии с теоремой каждая насыщенная формация относится к классу Шунка. Из этой же теоремы и следуют оба утверждения.

Следует проиллюстрировать оба следствия на следующих примерах:

* класс U не является классом Шунка и в диэдральной группе порядка  отсутствуют U-проекторы. Пусть X - класс групп. Подгруппа  называется X -покрывающей подгруппой группы , если  является X -проектором каждой подгруппы группы , в которой  содержится;
* в группе  степени , являющейся знакопеременной, силовская -подгруппа  является N-проектором, но не является N-покрывающей подгруппой. Действительно, в  имеется подгруппа, изоморфная . Пусть  - подгруппа группы , которая содержится в , и изоморфная . Тогда  нормальна в  и N, то есть подгруппа  не является N -проектором группы . Значит, подгруппа  не является N -покрывающей подгруппой группы . Следует обратить внимание на то, что подгруппа  является N2 -покрывающей подгруппой группы .

Важной является следующая лемма: пусть X - гомоморф,  - X -покрывающая подгруппа группы  тогда и только тогда, когда  X и из условий (условия ):

, ,  X

следует, что .

Доказательство данной леммы: пусть  - X -покрывающая подгруппа группы  и пусть выполняются условия . Так как  - X -проектор подгруппы , то  X -максимальна в . Однако,  X, поэтому

 и .

Обратно, пусть  X и для всех подгрупп  и , которые удовлетворяют условиям , следует, что . Делается предположение, что подгруппа  не является X -покрывающей подгруппой группы . Тогда подгруппа  не является X -проектором некоторой подгруппы . Это означает, что для некоторой нормальной подгруппы  группы  подгруппа  не X -максимальна в . Пусть  является X -максимальной подгруппой в , содержащей . Тогда , а поскольку  X и X - гомоморф, то

 X.

Для подгруппы  выполняются условия , следовательно, , возникло противоречие. Поэтому допущение неверно, подгруппа  - X -проектор подгруппы , а так как  - произвольная подгруппа группы , содержащая , то  - X -покрывающая подгруппа группы .

# Класс Шунка как пример класса конечных групп

Далее стоит остановиться на классе Шунка. Под классом Шунка понимается класс групп, который одновременно является замкнутым относительно факторгрупп и относится к примитивно замкнутым классам. Следовательно, для класса Шунка справедливо одновременное выполнение требований () и ().

Для дальнейших рассуждений определенную важность представляет собой следующая теорема: всякий класс Шунка является насыщенным классом.

Доказательство теоремы начинается с предположения, что X является классом Шунка и  - нормальная подгруппа группы ,  и  X. Далее выполняется проверка того, что  X. В соответствии с леммой из предыдущей теоремы, можно говорить о совпадении подгруппы Фраттини  с пересечением ядер всех максимальных подгрупп, другими словами:

.

Поскольку , то  для всех . Значит:

 X,

та как  X и X - гомоморф. Теперь  X, так как класс X является примитивно замкнутым.

Существует полезное следствие из данной теоремы: если класс Шунка X является формацией, то X - тоже насыщенная формация.

Следующая теорема, играющая важную роль в рассматриваемой тематике, формулируется следующим образом: насыщенная формация является классом Шунка.

Для доказательства данной теоремы следует предположить, что F- насыщенная формация. Тогда для F справедливо выполнение требований (), (), (). Необходимо показать, что для F справедливо выполнения требования (). Пусть F для всех . Согласно соответствующей лемме наблюдается совпадение подгруппы Фраттини  с пересечением ядер всех максимальных подгрупп, другими словами:

.

Поскольку F является формацией, то:

F,

а так как F является насыщенной, то F.

Данную теорему можно проиллюстрировать следующим набором примеров:

* классы N, Nπ, U, Uπ, S, Sπ, T, Tπ относятся к насыщенным формациям, поэтому они относятся к классам Шунка;
* формации абелевых групп не являются насыщенной формацией, поэтому формация абелевых групп не относится к классу Шунка.

Следующая теорема формулируется так: класс всех разрешимых групп, у которых коммутанты обладают нечетными индексами, относится к классу Шунка и не является формацией.

При доказательстве данной теоремы вначале осуществляется проверка того, что

X={G S |2 не делит G:G’}

является классом Шунка. Пусть X и . Поскольку , то:

.

и  не делит , то есть X. Пусть S и X для всех . Далее предполагается, что  делит . Тогда в группе  существует нормальная подгруппа  индекса . Очевидно, что  и  X, обнаружено противоречие. Следовательно,  является классом Шунка.

Пусть:

.

Порядок группы  составляет , а порядок ее центра - .

Значит, в группе  существует нормальная подгруппа  порядка  и . Подгруппа  и

X.

Помимо этого,

X,

однако

X,

следовательно, X не является формацией.

Еще одна теорема формулируется следующим образом: если в классе Шунка X содержится -группа, то в X содержатся все -группы.

Для доказательства этой теоремы следует предположить, что неединичная -группа X. В -группах максимальные подгруппы являются нормальными, и обладают простыми индексами, то есть если , то  и . Поскольку X является гомоморфом, то X. Значит, в X существует группа порядка . Далее делается допущение, что  является произвольной -группой. Рассматривается произвольная максимальная подгруппа  группы . Тогда для  справедливо:  и . В таком случае:

, X.

Так как X - класс Шунка, то требование () из его определения дает возможность заключить, что X.

Характеристикой класса X является множество простых чисел , для которых в X существует неединичная -группа. Характеристика класса X обозначается через (X).

В связи с вышеизложенным, вытекает следующая теорема: если X является классом Шунка, то X∩N= Nχ(X).

Целесообразно привести доказательство данной теоремы. Предполагается, что X∩N и . Тогда в нильпотентной группе  присутствует максимальная подгруппа  индекса . Так как пересечение классов Шунка X и N вновь является классом Шунка, то:

 X∩N и ( X).

Следовательно, ( X) и  Nχ(X).

Обратно, делается допущение  Nχ(X). Рассматривается произвольная максимальная подгруппа  группы . Поскольку  является нильпотентной, то  является нормальной в  и . Однако ( X), поэтому X, а так как X - класс Шунка, то X и  Nχ(X)  X∩N.

У данной теоремы существует следствие: если X - насыщенная формация, то X∩N= Nχ(X).

Пусть  - группа и F - формация. Выполняется обозначение пересечения всех нормальных подгрупп группы , факторгруппы по которым принадлежат F, через GF, и называется F -корадикалом группы . Следовательно:

GF=

Существует следующая лемма: пусть F является формацией, а  - группой. Тогда:

1. Если  и  F, то GF.
2. G/ GF F.
3. GF является наименьшей нормальной подгруппой группы , для которой G/ GF F.
4.  F тогда и только тогда, когда GF.

Доказательство также приводится отдельно для каждого из пунктов.

1. Если  и  F, то в соответствии с определением F -корадикала GF.
2. Согласно определению формации, G/GF= F.
3. Из  и  следует, что GF является единственной нормальной подгруппой группы , для которой G/ GF F.
4. Если  F, то GF. Если GF, то  F.

В качестве иллюстрации вышеизложенного целесообразным является привести несколько примеров:

* GA является коммутантом группы ;
* пусть X является классом всех элементарных абелевых -групп. В соответствии с доказанной теоремой класс X является формацией. Согласно лемме, для каждой из -групп  подгруппа PX совпадает с подгруппой Фраттини группы.

Существует следующая лемма: пусть  - группа, F - формация и . Тогда:

1. (G/K) F= GFK/K.
2. Если  является эпиморфизмом , то F=(GF).
3. Если , , то HF=GFK.
4. Если ,  и GF, то HF=GFK.

Доказательство леммы целесообразно осуществить для каждого пункта отдельно:

1. Пусть (G/K) F= . Тогда

 F

и GF в соответствии с предыдущей леммой, поэтому GF. С другой стороны

(GF/K) GF/K(G/ GF)/(GFK/ GF) F

поскольку (G/ GF) F и F являются гомоморфами. В соответствии с предыдущей леммой (GFK/K), другими словами:

(GFK/K)=N/K=(G/K)F.

1. Пусть  является эпиморфизмом и . Тогда  и:

F=(G/K)F = GFK/K=(GF).

1. Пусть  и  - естественный эпиморфизм группы  на , то есть  для всех . Так как ,  и  то:

.

Так как ( HF)= HFK/K, то:

(GF)=GFK/K=(G/K)F=(GF)= (H)F=(HF)HFK/K,

поэтому GFK/K= HFK/K и GFK = HFK.

1. Если  GF, то HFK = GFK=GF.

Пусть X является классом групп, а F - формация. Корадикальное произведение X и F - это класс:

XF={GT|GF X},

который состоит из всех групп, у которых F -корадикал принадлежит X.

Далее предстоит доказать следующую лемму: пусть X - класс групп, F - формация, тогда:

1. Если X - нормально наследственный класс, то X XF.
2. Если в X содержится единичная группа (например, X является непустым гомоморфом), то F XF.
3. Если X и F - формации, то группа XF тогда и только тогда, когда GFX.

Доказательство приводится для каждого из пунктов отдельно.

1. Если X и X является нормально наследственным классом, то GF X и:

XF, то есть X XF.

1. Если  F, то GFE X и XF, то есть F XF.
2. Пусть X и F - формации. Делается допущение, что XF. Тогда:

GF X и GFX.

в соответствии с предыдущей леммой. Обратно, если GFX, то GF X и XF.

Для понимания свойств произведения классов конечных групп целесообразным является рассмотрение следующей теоремы:

1. Если X является гомоморфом, а F - формацией, то XF тоже является гомоморфом.
2. Если X и F - формации, то XF тоже является формацией.
3. Если X и F являются наследственными формациями, то XF тоже является наследственной формацией.
4. Если X и F являются нормально наследственными формациями, то XF тоже является нормально наследственной формацией.

Доказательство теоремы ведется по каждому из пунктов.

1. Пусть  XF и . Тогда:

(G/N)F=GFN/NGF/( GF∩N) X,

так как GFX и X - гомоморфы. Поэтому G/N XF и XF - гомоморфы.

1. Пусть X и F - формации. Из предыдущего пункта теоремы следует, что произведение XF - гомоморф. Пусть:

 XF, .

Тогда:

(G/Ni)F=GFNi/NiGF/( GF∩Ni)  X.

Так как X является формацией, то:

(G/N1∩N2)F=GF(N1∩ N2)/N1∩ N2

 GF/( GF∩N1∩N2)  X

и G/(N1∩N2)XF. Значит, XF является формацией.

1. Пусть X и F являются наследственными формациями,  XF и . Тогда:

HGF/GF≤G/ GF F,

поэтому HGF/GF F. Поскольку:

HGF/GFH/(H∩ GF),

то HF≤ GF. Но GF X, поэтому HF X и H XF.

1. Пусть X и F являются нормально наследственными формациями. Пусть XFи . Тогда GF X. Следует рассмотреть подгруппу GF. Очевидно, что . Так как:

K/GFG/GFF,

то K/GFF и

K/GF=N GF/GFN/(N∩GF)F,

то есть NF≤N∩GF. Поскольку:

N∩GF GF X

и X является нормально наследственной формацией, то N∩GF X. Однако, NF нормальна в N∩GF, следовательно, NF X и NXF.

Далее доказательству подлежит следующая теорема. Пусть X, Y, Z являются формациями. Тогда:

1. G(XY)=GYX для любой группы .
2. (XY)Z= X(YZ).

Далее приводится доказательство этой теоремы.

1. В соответствии с предыдущей теоремой произведение XY является формацией. Пусть G(XY) - XY корадикал группы . Поскольку  XY, то:

(G/N)Y=G YN/NG Y/( G Y∩N)X,

поэтому:

(GY)X≤N= G(XY).

Следует рассмотреть факторгруппу G/(GY)X. Так как

(G/(GY)X)Z= GY(GY)X/(GY)X

 GY/((GY)X∩GY)= GY/(GY)XX,

то:

G/(GY)XXY и G(XY)≤(GY)X.

Следовательно, (GY)X=G(XY).

1. Из предыдущего пункта настоящей теоремы следует, что:

G(XY)Z=(GZ)(XY)=((GZ)Y)X==(G YZ)X= GX(YZ)

для любой группы . Теперь, если (XY)Z, то

G(XY)Z=E= GX(YZ)

и X(YZ), следовательно:

(XY)Z X(YZ).

Наоборот, если X(YZ), то:

GX(YZ)=E= G(XY)Z

и (XY)Z. Поэтому:

X(YZ)(XY)Z и X(YZ)(XY)Z.

# Заключение

В ходе работы, целью которой является изучение свойств конечных групп, произведений классов конечных группам проекторов.

Выяснено, что под классом групп понимается множество групп, в которое вместе с каждой из своих групп входят все изоморфные ей группы. Некоторые классы обладают стандартными обозначениями:

*  - класс всех абелевых групп;
*  - класс всех сверхразрешимых групп;
*  - класс всех (конечных) групп;
*  - класс всех разрешимых групп;
*  - класс всех нильпотентных групп.

Формация – это класс групп, который замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Класс групп, который замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений, считается формацией.

Подгруппа  группы  называют -проектором группы , если  - -максимальная подгруппа группы  для любой из нормальных подгрупп  группы .

В качестве примера класса конечных групп были исследованы свойства класса Шунка. Под классом Шунка понимается класс групп, который одновременно является замкнутым относительно факторгрупп и относится к примитивно замкнутым классам.

# Список литературы

1. Аминов Л.К. Теория групп и ее приложения. Конспект лекций и задачи / Л.К. Аминов, А.С. Кутузов, Ю.Н. Прошин. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 123 с.
2. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп / В.А. Ведерников. - Смоленск: СГПИ-БГПИ, 1988.
3. Ведерников В.А. Элементы теории групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина. – М.: МГПУ, 2013. – 87 с.
4. Каргаполов М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков.– 5 изд. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.
5. Курносов Н. Теория групп в физике и химии / Н. Курносов .// Дубна, 20-31 июля 2013.
6. Курош А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – 3 изд. – СПб.: Лань, 2005. – 648 с.
7. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.
8. Холл М. Теория групп / М. Холл. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 468 с.